

5. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений / П. И. Лизоркин. – М. : Наука, 1981. – 384 с.
 6. Иманалиев М.И., Байзаков А.Б., Кененбаева Г.М. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Бишкек: Турар, 2005. – 227с.
-

УДК 519.642, 519.688

Закирова Динара Абдраимовна, аспирант,
ORCID 0009-0009-5033-0722
Кульматова Нурила Абдимиталовна, магистр,
ORCID 0009-0005-2593-7785
Ош технологиялык университети
Email: anid_0308@mail.ru

ИНТЕГРАЛДАРДЫ ЭСЕПТӨӨ ҮЧҮН PYTHON ПРОГРАММАЛОО ТИЛИН КОЛДОНУУ МҮМКҮНЧҮЛҮКТӨРҮ

Макалада Python программалоо тилин интегралдарды эсептөө үчүн колдонуу мүмкүнчүлүктөрүн көрсөтүү каралган. Интегралдар менен иштөөдө негизги касиеттердин формулалары да кеңири колдонулуп, аныкталган жана аныкталбаган интегралды чыгарууда Python программалоо тилинде мисалдарды түшүндүрүү мүмкүнчүлүктөрү жеңилдетилип берилген. Программалоо тилинин жардамында берилген аныкталган интегралдардын графигин тургузуу да жеңил. Интегралдарды программалоо тилинде иштелишин көрүү үчүн Python китепканаларын колдонуп мисалдар иштелген.

Негизги сөздөр: интеграл, теңдеме, аныкталган жана аныкталбаган интегралдар, Python программалоо тили, график, функция, Ньютон-Лейбниц формуласы.

Закирова Динара Абдраимовна, аспирант,
Кульматова Нурила Абдимиталовна, магистр,
Ошский технологический университет

ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

В статье представлены возможности использования языка программирования Python для вычисления интегралов. В работе с интегралами также широко используются формулы основных свойств, при выводе определенных и неопределенных интегралов облегчаются возможности пояснения примеров на языке программирования Python. Также легко построить график определенных интегралов, используя язык программирования. Примеры разработаны с использованием библиотек Python, чтобы увидеть, как интегралы работают на языке программирования.

Ключевые слова: интеграл, уравнение, определенные и неопределенные интегралы, язык программирования Python, график, функция, Формула Ньютона-Лейбница.

Zakirova Dinara Abdraimovna, graduate student,
Kulmatova Nurila Abdimitalovna, master - teacher,
Osh Technological University

POSSIBILITIES OF USING THE PYTHON PROGRAMMING LANGUAGE TO CALCULATE INTEGRALS

The article presents the possibilities of using the Python programming language to calculate integrals. In working with integrals, the formulas of the main properties are also widely used, in the derivation of definite and indefinite integrals, the possibilities of explaining examples in the Python programming language are facilitated. It is also easy to graph given definite integrals using a programming language. Examples are worked out using Python libraries to see how integrals work in the programming language.

Key words: integral, equation, definite and indefinite integrals, Python programming language, graph, function, Newton-Leibniz formula.

Киришүү. Математика тармагында интегралдар менен иштөөнү берүү үчүн, интегралдын аныкталган жана аныкталбаган интегралдардын иштелишине маани берүү абзел. Интегралдарды түрдүү тармактарда колдонулушун да көп байкайбыз. *Интеграл* деген сөз латын тилинен келип чыккан жана “бүтүн” деген түшүнүктү берет. Интеграл математикалык анализдин эң керектүү болгон түшүнүктөрүнүн бири болуп саналат. Алар менен иштөөдө аныкталган жана аныкталбаган интегралдарга, Ньютон-Лейбництин формуласына, колдонулган негизги касиеттерине токтолуп, мисалдардын иштелишине байкоо жүргүзөбүз. Интегралдарды чыгарууда [1] усулдук колдонмодон интегралдоонун негизги касиеттерин карайбыз. Макалада интегралдоонун негизги касиеттери толугу менен берилди. Python программалоо тилин колдонууда жана анын китепканасын орнотуу үчүн [4] колдонмодо керектүү болгон маалыматтар көрсөтүлгөн. Усулдук колдонмо [5] мисалдардын чыгарылышына варианттар жана алардын иштелишине мисалдар каралган.

Актуалдуулугу. Интегралдык эсептөө интегралдын касиетин, аны эсептөө жолун, түрдүү математикалык мисалдардын иштелишин Python программалоо тилинде колдонулушунун мүмкүнчүлүктөрүн кароо. Азыркы мезгилде ар бир тармакты программалоо тилдеринде колдонуу менен жеткиликтүү түшүндүрүү мүмкүнчүлүктөрү чоң.

Изилдөөнүн ыкмалары:

1. *Интегралдоонун негизги түшүнүктөрү жана касиеттери*

Интегралдар менен иштөөдө, аныкталган жана аныкталбаган интегралдарга көңүл бурабыз. Бирок интегралдар менен иштөөдө негизги касиеттерине да көңүл буруп, мисалдарда колдонобуз. Төмөндө көрсөтүлгөн:

Негизги касиеттери:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

Эгерде a , b жана c каалагандай чекиттери, | аралыгындагы, $f(x)$ үзгүлтүксүз болсо [1], анда

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

Аныкталган интегралдар. Негизинен аныкталган интегралдар менен иштөөдө Ньютон-Лейбництин формуласын колдонуп мисалдарды чугаруу ыңгайлуу.

Эгерде $f(x)$ функциясы $x=a$ жана $x=b$ чекиттерин камтыган, | аралыгындагы үзгүлтүксүз болсо, анда $F(b) - F(a)$ айырмасынын мааниси $F(x)$ функциясынын a дан b га чейинки интегралы деп аталат. Мында $F(x)$, $f(x)$ функциясынын | аралыгындагы баштапкы функциясы, төмөндөгүдөй белгиленет [1]:

$$\int_a^b f(x) = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Аныкталган интегралдар менен иштөөдө ийри сызыктуу трапециянын аянтын табуу формуласын колдонобуз.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$\int_a^b f(x)dx$ формуласын колдонуу менен мисалдарды иштөөнү карап көрөлү.

а) $I = \int_0^{\pi} \sin x dx$ интегралын табуу.

$$I = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -1 + 0 = -1$$

б) $\int_0^2 (x^3 - x^2) dx$ интегралын табуу. Ньютон-Лейбництин формуласын колдонуп иштейбиз.

$$\int_0^2 (x^3 - x^2) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} \right) - 0 = \frac{4}{3} = 1.33333333$$

в) $\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$ интегралын табуу.

Бөлчөктүү интеграл менен иштөөдө $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ формуласын колдонуп жөнөкөйлөтүп интегралын таап алабыз.

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^3 x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \Big|_1^3 = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^3 = -\frac{1}{x} \Big|_1^3 = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{1} \right) = \frac{2}{3} = 0.66666667$$

Аныкталбаган интегралдар. $f(x)$ функциясынын анык эмес интегралы деп анын $F(x) + C$ баштапкы функцияларынын жыйындысын айтабыз жана $\int f(x)dx = F(x) + C$ деп жазабыз.

Мында $f(x)$ - интеграл астындагы функция, ал эми $f(x)dx$ интеграл астындагы туюнтма деп аталат. Берилген функциянын баштапкы функциясын табуу операциясы деп аталат [2].

$\int (3 - x^5)dx$ аныкталбаган интегралын табабыз.

$$\int (3 - x^5)dx = 3x - \frac{x^6}{6} + C$$

Өзгөрмөлөрү ажыралуучу теңдемелерге мүнөздөмө.

$f_1(y)dy = f_2(x)dx$ түрүндөгү теңдеме берилди, $f_1(y)$ жана $f_2(x)$ берилген теңдеменин функциялары.

$f_1(y)dy = f_2(x)dx$ теңдемесин интегралдайбыз жана төмөндөгүдөй

$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx + c$ формулага ээ болобуз. Мында c - турактуу сан [3].

Аныкталбаган интегралдарга да мисалдардын иштелишин көрсөтүп, жыйынтыгын алалы.

$\int (x^4 + 5x)$ анык эмес интегралы берилди, жөнөкөйлөтүп чыгарылышын карайбыз.

$$\int (x^4 + 5x)dx = \int x^4 dx + \int 5x dx = \int x^4 dx + 5 \int x dx$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \text{ формуласын колдонуп, эсептеп чыгарып алабыз.}$$

$$\int x^4 dx = \frac{1}{4+1} x^{4+1} = \frac{1}{5} x^5, \int x dx = \frac{1}{1+1} x^{1+1} = \frac{1}{2} x^2 \text{ ,.}$$

Ар бир бөлүнүп каралган интегралды жалпы интегралдын ордуна коебуз.

$$\int (x^4 + 5x) = \left(\frac{1}{5} x^5 + \frac{5}{2} x^2 + C \right) \text{ барабар.}$$

2. Python интеграциясы

Python чөйрөсү азыркы учурда өтө актуалдуу болгон программалоо тилдеринин бири болуп саналат. Бул программалоо тилин колдонуу жеңил, ар түрдүү багыттагы программаларды түзүүдө атайын колдонулган китепканаларын орнотуунун негизинде ишке ашат.

Макалада интегралдар менен иштөө үчүн китепканаларга аныктамалар берилген. Ар бир китепкана программага код менен орнотулат жана түрдүү функцияларды камтыйт. Төмөндө китепканаларга түшүндүрмө жазылган.

Python интеграциясы үчүн китепканалар:

- *NumPy* - бул Python программисттерине гана белгилүү эмес китепкана. Ал n - өлчөмдүү массивдерде маалыматтарды сактоого жана түзөтүүгө мүмкүндүк берет, бул кээ бир учурларда Pythonдогу кадимки тизмелерге караганда алда канча ишенимдүү. NumPyнин өзөгүндө өтө татаал математикалык өзгөртүүлөрдү жасоо жөндөмдүүлүгү турат. Орнотуу коду - *pip install numpy*.

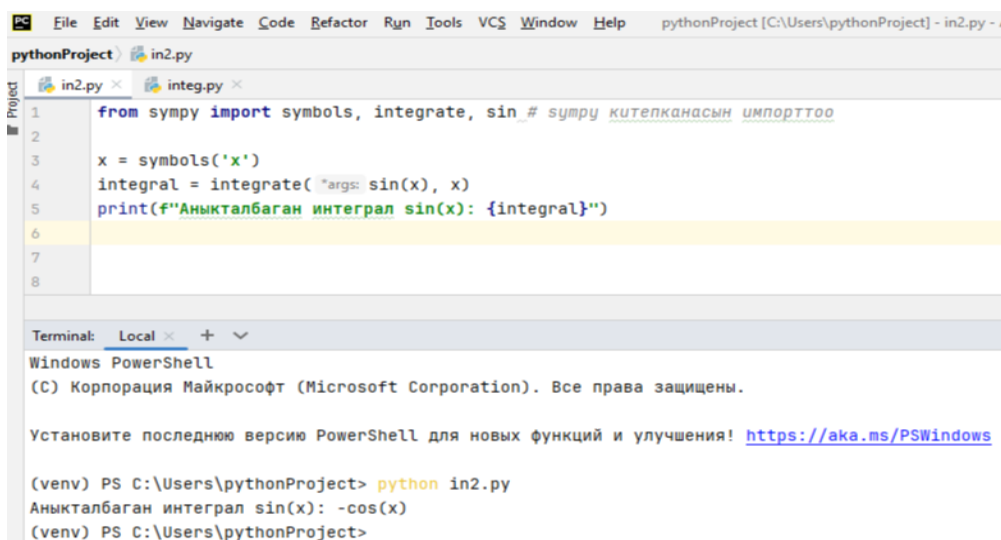
- *SciPy* китепканасы SciPy стек түзгөн негизги пакеттердин бири. Математикалык теңдемелер менен иштөөдө *linalg*, *integrate*, *quad* функцияларын колдонуу менен мисалдар чыгарылат. Орнотуу коду – *pip install scipy*.

- *Matplotlib* - бул Python китепканасы, ал тиркемелерге сюжеттерди киргизүү үчүн API камсыз кылат. Гистограммалар, тилке диаграммалары, чачыранды диаграммалар, тегерек диаграммалар - *Matplotlib* визуализациялардын кеңири спектрин көрсөтө алат. Эки китепкана бар: *pylab* жана *pyplot*. *PyLab matplotlib* менен орнотулган модуль, ал эми *pyplot matplotlib*ге орнотулган модуль. Орнотуу коду - *pip install matplotlib*.

- *SymPy* символикалык эсептөө үчүн колдонулган ачык булак Python китепканасы. Түрдүү тармактарда колдонулган, ар кандай функцияларга ээ болгон китепкана деп да атасак болот. Орнотуу коду - *pip install sympy*.

3. Python интеграциясы үчүн интегралдоого мисалдар. Интегралдоодо Python программалоо тилинин колдонулушун көрсөтүү.

$\int \sin x dx = -\cos x + C$ аныкталбаган интегралынын программалоо тилинде чыгарылышы.



```

pythonProject [C:\Users\pythonProject] - in2.py - Administrator
pythonProject in2.py
1 from sympy import symbols, integrate, sin # sympy китепканасын импорттоо
2
3 x = symbols('x')
4 integral = integrate("args: sin(x), x)
5 print(f"Аныкталбаган интеграл sin(x): {integral}")
6
7
8

Terminal: Local x + v
Windows PowerShell
(C) Корпорация Майкрософт (Microsoft Corporation). Все права защищены.

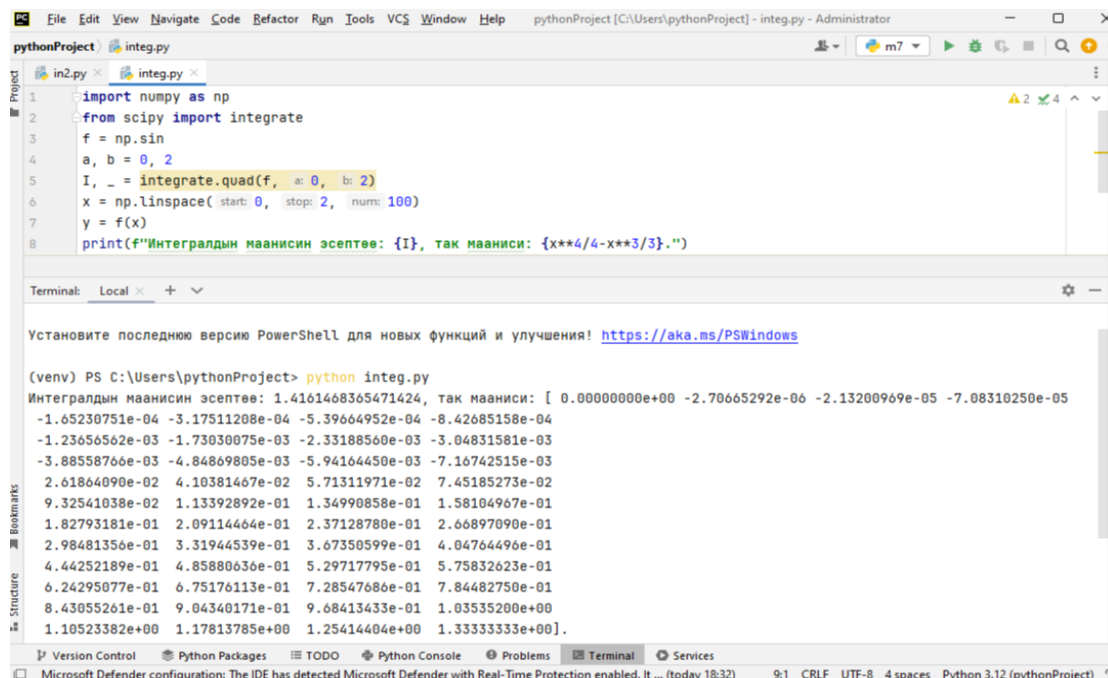
Установите последнюю версию PowerShell для новых функций и улучшения! https://aka.ms/PSWindows

(venv) PS C:\Users\pythonProject> python in2.py
Аныкталбаган интеграл sin(x): -cos(x)
(venv) PS C:\Users\pythonProject>

```

Программа коду. $\int_0^2 (x^3 - x^2) dx$ аныкталган интегралынын чыгарылышы төмөндөгүдөй. $\int_0^2 (x^3 - x^2) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} \right) - 0 = \frac{4}{3} = 1.33333333$

Ушул мисалдын Python программалоо тилинде иштелишин көрсөлү.



```

pythonProject [C:\Users\pythonProject] - integ.py - Administrator
pythonProject integ.py
1 import numpy as np
2 from scipy import integrate
3 f = np.sin
4 a, b = 0, 2
5 I, _ = integrate.quad(f, a=0, b=2)
6 x = np.linspace(start=0, stop=2, num=100)
7 y = f(x)
8 print(f"Интегралдын маанисин эсептөө: {I}, так мааниси: {x**4/4-x**3/3}")

Terminal: Local x + v
Windows PowerShell
Установите последнюю версию PowerShell для новых функций и улучшения! https://aka.ms/PSWindows

(venv) PS C:\Users\pythonProject> python integ.py
Интегралдын маанисин эсептөө: 1.4161468365471424, так мааниси: [ 0.00000000e+00 -2.70665292e-06 -2.13200969e-05 -7.08310250e-05
-1.65230751e-04 -3.17511208e-04 -5.39664952e-04 -8.42685158e-04
-1.23656562e-03 -1.73030075e-03 -2.33188560e-03 -3.04831581e-03
-3.88558766e-03 -4.84869805e-03 -5.94164450e-03 -7.16742515e-03
2.61864090e-02 4.10381467e-02 5.71311971e-02 7.45185273e-02
9.32541038e-02 1.13392892e-01 1.34990858e-01 1.58104967e-01
1.82793181e-01 2.09114464e-01 2.37128780e-01 2.66897090e-01
2.98481356e-01 3.31944539e-01 3.67350599e-01 4.04764496e-01
4.44252189e-01 4.85880636e-01 5.29717795e-01 5.75832623e-01
6.24295077e-01 6.75176113e-01 7.28547686e-01 7.84482750e-01
8.43055261e-01 9.04340171e-01 9.68413433e-01 1.03535200e+00
1.10523382e+00 1.17813785e+00 1.25414404e+00 1.33333333e+00].

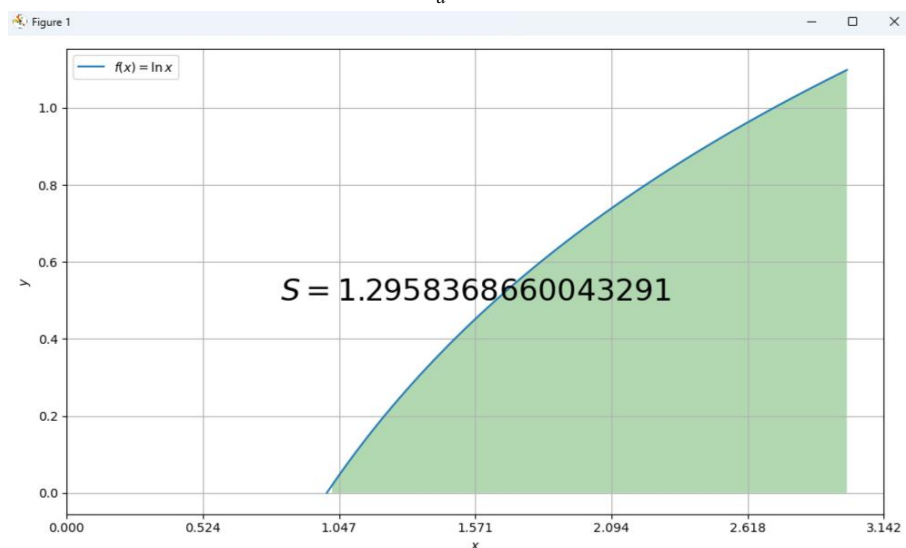
```

$\int_1^3 \ln x dx = (x \ln(x) - x) \Big|_1^3 = (3 \ln(3) - 3) - (1 \ln(1) - 1) = (3 * 1.09861229 - 3) - (1 * 0 - 1) = 0.29523687 + 1 = 1.29583687$

$\int_1^3 \ln x dx$ аныкталган интегралынын графигин Python программалоо тилинде түзөбүз.

Биринчи кезекте программалык кодун жазып алып, кодо график чийүү үчүн **Matplotlib** китепканасын кошуп алабыз. Ийри сызыктуу трапециянын аянтын табуу формуласын колдонуп берилген функциянын аянтын да табууга болот.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Программанын графиги

```
pythonProject [C:\Users\pythonProject] - integ1.py - Adm
pythonProject integ1.py
in7.py x integ1.py x integ.py x
1 import numpy as np
2 from scipy import integrate
3 from matplotlib import pyplot as plt
4 f = np.log
5 a, b = 1, 3
6 I, _ = integrate.quad(f, a: 1, b: 3)
7 x = np.linspace( start: 1, stop: 3, num: 100)
8 y = f(x)
9 fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6), layout="tight")
10 ax.plot(x, y, label=r"$f(x)=\ln x$")
11 ax.set_xlabel("$x$")
12 ax.set_ylabel("$y$")
13 ax.fill_between(x, np.zeros_like(x), y, where=(y > 0), facecolor='green', alpha=0.30)
14 ax.set_xticks(np.linspace( start: 0, np.pi, num: 7))
15 ax.text(np.pi/2, 0.5, fr"$S = {I}$", fontdict={"size": 24, "ha": "center"})
16 ax.legend()
17 ax.grid()
18 plt.show()
19 print(f"Интегралдын маанисин эсептөө: {I}, так мааниси: {(x*np.log(x)-x)}.")
```

Программанын коду

```
(venv) PS C:\Users\pythonProject> python integ1.py
Интегралдын маанисин эсептөө: 1.2958368660043291, так мааниси: [-1.      -0.9997973  -0.99919453 -0.99819947 -0.99681958 -0.99506207
-0.13872079 -0.11952775 -0.10017751 -0.08067126 -0.0610102  -0.04119552
-0.02122837 -0.00110988  0.0191588  0.03957658  0.06014235  0.08085506
 0.10171363  0.12271701  0.14386419  0.16515413  0.18658585  0.20815835
 0.22987065  0.2517218  0.27371085  0.29583687].
```

Жыйынтыгы. Интегралдар ар кандай тармактарда кеңири колдонулат. Мисалга алсак: физика, экономика, инженерия, статистика, экология, математика тармактары. Компьютердик тармактарда да кеңири колдонулат. Мисалы, сандык интеграцияга байланыштуу алгоритмдерди иштеп чыгууда жана сигналдарды иштетүүдө, ийри сызыктуу трапециянын аянтын табууда, аянттарды эсептөөдө.

Корутунду. Интегралдарды эсептөөдө программалоо тилдерин колдонуу бир топ жеңилдиктерди жаратты. Мисалдарды иштөөдө, математикалык жазылышына токтолбостон программалык көрсөтүлүшүнө да көңүл бөлүндү. Интегралдарды программалоо багытындагы адистиктерде окутууда предметке кызыктыруу жаралышы белгилүү болду. Ошондуктан бул макаланын мүмкүнчүлүгү жана пайдалуулугу берилген интегралдарды программалоо тили менен терең пайдаланып түшүндүрүлүп берилишинде экендиги аныкталды. Аныкталган жана аныкталбаган интегралдарга мисалдар көрсөтүлүп, негизги керектүү болгон интегралдар менен иштөөдөгү касиеттердин колдонушу каралып, мисалдар көрсөтүлүп берилди. Берилген интегралдар менен иштөөдөгү негизги касиеттер, Ньютон-Лейбництин формуласы, ийри сызыктуу трапециянын формуласынын колдонулушуна мисалдар келтирилди.

Адабияттар:

1. В. Козырева, А. Дыйшекеева. Математика таблицада: Орто мектептер үчүн. –Б.: “АРХИ”. 2004. – 96 б.
2. Сопуев У.А. Жогорку математика: Окуу колдонмо. –Ош: “Кагаз ресурстары” басмаканасы, 2015. -142-144 бб. https://www.okuma.kg/read/web/books/Жогорку_математика.pdf
3. Байзаков А.Б. Дифференциалдык тендемелер. Б.: 2016. – 16 б.
4. Закирова Д.А., Ташибеков Т.Ч., Арзыбаева М.А. Python чөйрөсүндө программалоо предмети боюнча усулдук колдонмо (Программалоо багытындагы адистиктер үчүн), ОшТУ, 2024-ж. -5 б, - 97 б. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=67202426>
5. А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова. Практикум по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям. — Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2005. – С. 7-9. <https://math.tusur.ru/book/int-2.pdf>
6. Бабенкова Т. В., Молоденкова Т. В., Черный Д. Е. Интегралы. Саратов: СГТУ, 2015. https://www.sstu.ru/teachers/2036-molodenkova_tatyana_viktorovna.html
7. И. В. Садовничая, Е. В. Хорошилова. Определенный интеграл: теория и практика вычислений. Московский гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, Москва: Изд. отд. факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008. -35 с. <https://viewer.rsl.ru/ru/rsl01004127618>
8. Гуров В.В. Методы интегрирования. Неопределенный и определенный интеграл [Электронный ресурс]: учеб. пособие по дисциплине "Математика" для студ. всех спец. https://www.sstu.ru/teachers/1644-gurov_vladimir_vladimirovich.html
9. Закирова Д.А., Алдосова А.Ж. Современный способ преподавания языков PYTHON и MATLAB для решения нелинейных алгебраических уравнений. Международная научно-практическая конференция, Индустриальная Россия: вчера, сегодня, завтра. Номер МНК-472, -95 с. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=68003283>
10. Практикум по компьютерным технологиям. [Электронный ресурс] – URL: <https://fadeevlecturer.github.io/>